LAHENDUSED 12.KLASS

1. **Vastus: Jada (a_n) esimene liige on $3\frac{1}{4}$ ja vahe on $\frac{1}{3}$ ning jada (b_n) esimene liige on $3\frac{1}{4}$ ja vahe on $\frac{1}{6}$.**
   Jada (a_n) esimese 2017 liikme summa on $684267\frac{1}{4}$.

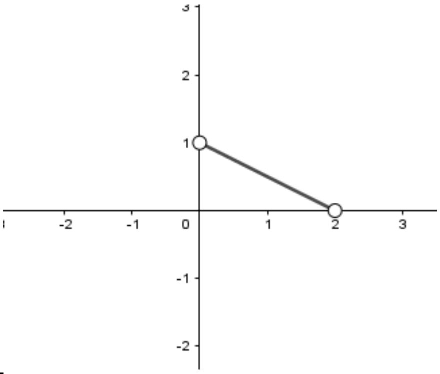
Lahendus:

Olgu jada (a_n) esimene liige a_1 ja vahe t. Siis jada (b_n) esimene liige on a_1 ja vahe on $\frac{t}{2}$.
Siis jada (a_n) üldliikme valem on $a_n = a_1 + t(n-1)$ ja jada (b_n) üldliikme valem on $b_n = a_1 + \frac{t}{2}(n-1)$.
Seega jada (c_n) üldliikme valem on
$c_n = a_n + b_n = a_1 + t(n-1) + a_1 + \frac{t}{2}(n-1) = 2a_1 + \frac{3}{2}t(n-1)$.
Ilmselt on ka (c_n) aritmeetiline jada, seega tema summa avaldub järgmiselt:
$S_n = 2a_1 n + \frac{3}{2}t \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3tn^2+(8a_1-3t)n}{4} = \frac{n^2+25n}{4}$.
Kuna võrrand $\frac{3tn^2+(8a_1-3t)n}{4} = \frac{n^2+25n}{4}$ peab kehtima iga $n \geq 1$ korral, siis järelikult $3t = 1$ ja $8a_1 - 3t = 25$ ehk $t = \frac{1}{3}$ ja $a_1 = 3\frac{1}{4}$.
Järelikult jada (a_n) esimene liige on $3\frac{1}{4}$ ja vahe on $\frac{1}{3}$ ning jada (b_n) esimene liige on $3\frac{1}{4}$ ja vahe on $\frac{1}{6}$.
Jada (a_n) esimese 2017 liikme summa on $3\frac{1}{4} \cdot 2017 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2016*2017}{2} = 684267\frac{1}{4}$.

Hindamine:

Leitud jada (c_n) üldliikme valem:	2p
Leitud jada (c_n) summa valem a_1 ja t kaudu:	2p
Leitud a_1 ja t väärtused:	2p
Leitud lõppvastus:	1p
	7p

2. **Vastus:** $\boldsymbol{y = 1 - 0,5x}$ **kus** $\boldsymbol{x \in (0;2); y \in (0;1)}$

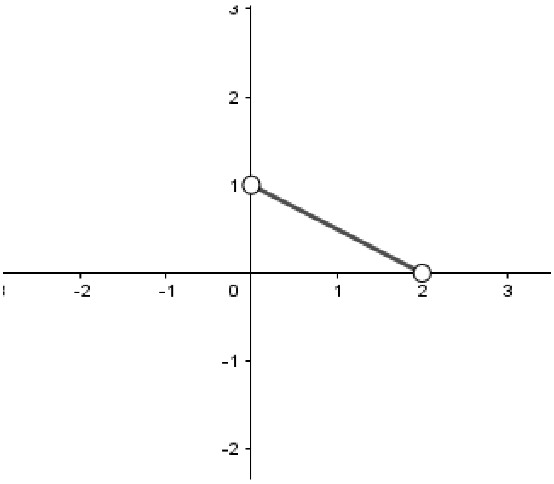


<u>Lahendus:</u>

$$\log_5 x + \log_5 y - (\log_5 x - \log_5 2) = \log_5(2 - x) \mid xy > 0 ; \frac{x}{2} > 0 ; x < 2$$
$$\log_5 x + \log_5 y - \log_5 x + \log_5 2 = \log_5(2 - x)$$
$$\log_5 y + \log_5 2 = \log_5(2 - x)$$
$$\log_5 y = \log_5(2 - x) - \log_5 2$$
$$\log_5 y = \log_5 \frac{2 - x}{2}$$
$$\log_5 y = \log_5(1 - 0,5x)$$

$$y = 1 - 0,5x \mid y > 0 ; 0 < x < 2$$

Vastus: $y = 1 - 0,5x$ kus $x \in (0; 2)$; $y \in (0; 1)$



Hindamine:

$xy > 0$, $\frac{x}{2} > 0$ ja $x < 2$ tähelepanek	1p
Võrrandi teisendamine	3p.
Lineaarfunkstiooni saamine ja tähelepanek, et $y > 0\ ja\ 0 < x < 2$	1p.
Õige joonis tühja punktidega	2p
	7p

3. Vastus: 257

Lahendus:

I lahendus. Teeme asenduse $x+4=a$ ning saame selle tulemusel viia esialgse avaldise kujule $(a-6)(a-2)(a+2)(a+6)=(a^2-4)(a^2-36)=a^4-40a^2+144$. Et teada saada, milline täisarv tuleks avaldisele juurde liita, et selle väärtused oleks sõltumata muutuja väärtustest alati positiivsed, leiame funktsiooni $f(a)=a^4-40a^2+144$ miinimumi.

Kasutades ekstreemumkohtade leidmise tingimust $f'(a)=0$, saame võrrandi $4a^3-80a=0$, kust $a_1=0; a_2=2\sqrt{5}; a_3=-2\sqrt{5}$. Kontrollides funktsiooni teise tuletisega $f''(a)=12a-80$ ekstreemumkoha liiki, saame miinimumkohtadeks $a_2=2\sqrt{5}$ ja $a_3=-2\sqrt{5}$. Kummalgi juhul on funktsiooni miinimumiks $f(a_2)=f(a_3)=-256$. Seega vähim täisarv, mida juurde liita esialgsele avaldisele, on 257.

II lahendus. Korrutades esialgses avaldises $(x-2)(x+2)(x+6)(x+10)$ omavahel läbi esimese ja neljanda ning teise ja kolmanda teguri, saame avaldise $(x^2+8x-20)(x^2+8x+12)$. Tehes asenduse $x^2+8x-4=a$, saame avaldise $(a-16)(a+16)=a^2-256$. Siit on selge, et vähim juurde liidetav täisarv on 257, mille tulemusel oleks avaldise väärtus positiivne sõltumata muutuja a väärtusest.

Hindamine:

I lahenduskäik:

Avaldise teisendamine sobivale kujule	3p
Tuletise leidmine	1p
miinimumkoha ja miinimumi leidmine	2p
Järelduse tegemine	1p
	7p

Märkus: esialgses avaldises sulgude avamisel, vastava funktsiooni tuletise leidmisel, miinimumkoha leidmiseks vajaliku võrrandi koostamisel ja ülesande lõpetamiseks vajaliku idee kirjeldamisel anda kokku 3p

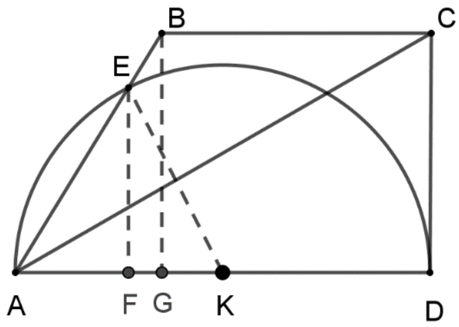
II lahenduskäik:

avaldiseni $(x^2+8x-20)(x^2+8x+12)$ jõudmine, kui see on olnud eesmärgipärane	3p
sobiv asendus ja avaldis a^2-256	3p
Järeldus	1p
	7p

4. Vastus: $S=\dfrac{10R^2\sqrt{3}}{9}$

<u>Lahendus:</u>

Kuna trapetsi haar CD on diameetrile AD joonestatud ringi puutuja, siis järelikult on tegu täisnurkse trapetsiga, mille alustega ristuv haar on CD. Konstrueerime joonise ja leiame trapetsi kõrguse CD:



$$\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}\Rightarrow CD=AD\cdot\tan 30^\circ=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Punkt K olgu aluse AD keskpunkt.

Tõmbame punktidest B ja E ristlõigud alusele AD. Kolmnurkade BAG ja EAF sarnasusest (tunnus NN) saame $\dfrac{BA}{AE}=\dfrac{BG}{EF}\Rightarrow\dfrac{4}{3}=\dfrac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{EF}\Rightarrow EF=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Kuna $AK=KE=R$, siis $\sin\angle AKE=\dfrac{EF}{EK}=\dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle AKE=60^\circ$, mistõttu kolmnurk EAK on võrdkülgne. Seega $AE=R$; $AB=\dfrac{4R}{3}$; $AG=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{2R}{3}$.

Trapetsi lühem alus $BC=2R-AG=2R-\dfrac{2R}{3}=\dfrac{4R}{3}$ ja pindala

$$S=\frac{1}{2}CD\cdot(AD+BC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2R\sqrt{3}}{3}\cdot\left(2R+\frac{4R}{3}\right)=\frac{R\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{10R}{3}=\frac{10R^2\sqrt{3}}{9}$$

<u>Hindamine:</u>

Õige konstruktsioon	1p
Trapetsi kõrguse avaldamine	1p
Trapetsi pikema haara ja ringjoone lõikepunkti kauguse avaldamine pikemast alusest (joonisel EF)	2p
Trapetsi teravnurga leidmine ja lühema aluse avaldamine	2p
Trapetsi pindala avaldamine	<u>1p</u>
	7p

5. **Vastus: 2017 ruutu**

Lahendus:

Selliste käikude tulemusena igal juhul jääb igas reas vähemalt üks valge ühikruut, ehk vähemalt 2017 ühikruutu jäävad valgeks.

Näitame, et on võimalik jätta valgeks 2017 ruutu.

Näiteks on võimalik jätta valgeks 2017 ühikruutu nii, et kõik 2017 asuvad ühel laua diagonaalil.

Valime kõik sellised ühikruudud koordinaatidega (X;Y) kus X < Y ning $X \geq 1$ ja $Y \leq 2017$. Kõik need ühikruudud asuvad laua diagonaalist ühel pool.

Iga ühikruudu jaoks valime ruudu, mille üheks tippuks on ühikruut koordinaatidega (X;Y) ja ülejäänuteks tippudeks on ühikruudud koordinaatidega (X;X) (Y;Y) (Y;X).

Seejärel värvime ühikruudud koordinaatidega (X;Y) ja (Y;X) mustaks ning ühikruudud koordinaatidega (X;X) ja (Y;Y) jätame valgeks.

Selliselt saame teha iga ühikruudu jaoks, mille koordinaadid on erinevad ning mis asuvad diagonaalist ühel pool. Iga värvimisel me värvime ära ka ühikruudu, mis on sümmeetriline laua diagonaali suhtes, ehk ka diagonaalist teisel pool olevad ruudud saavad mustaks. Selliste operatsioonide tulemusena jäävad valgeks ainult ühikruudud, mille koordinaadid on samad ning neid on täpselt 2017.

Hindamisjuhend:

Märkus, et igas reas (veerus) jääb valgeks vähemalt üks ühikruut, ehk vähemalt 2017 ühikruutu jäävad valgeks	2p
Näide, et on võimalik jätta valgeks 2017 ruutu	5p
	7p

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 1p.